

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# راهبردهای حل مسئله

امام علی (ع):

آموزش و یادگیری فقط از راه تعقل و درک تحقق می‌یابد. (حکمت ۹۲)

بنابراین، برنامه درسی ریاضی که اساس آن بر منطق و عقل بنا شده است باید به گونه‌ای تدوین شود که موجبات تحول در شیوه‌های سنتی تدریس معلمان را فراهم آورد و به‌جای طراحی برای آموزش و انتقال دانش، دانش‌آموزان را به فراگیری راه‌های کسب دانش و یادگیری هدایت نماید.

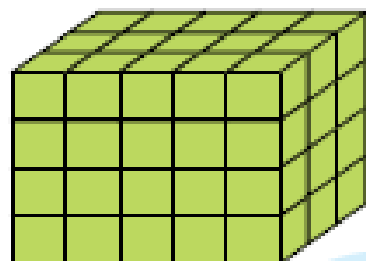
# حل مسئله

گانیه (۱۹۸۵) با در نظر گرفتن حل مسئله به عنوان **عالی ترین شکل یادگیری**، آن را اینگونه تعریف می کند:

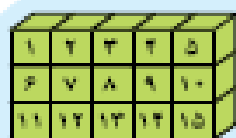
«فرآیندی است که به کمک آن، یادگیرنده ترکیبی از **مفاهیم و مهارت های آموخته شده قبلی را کشف می نماید و می تواند با به کارگیری آنها مسئله جدیدی را حل کند، علاوه بر آن، موجب یادگیری جدید نیز می شود.**»

تحقیق: سطوح یادگیری از نظر گانیه را بررسی کنید

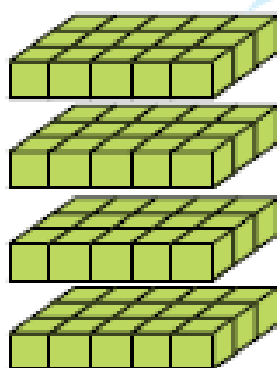
# رویکرد حل مسئله در کتاب پنجم



۳- آقای احسانی از دانش آموزان کلاسش خواست حجم مکعب مستطیل رویه رو را حساب کنند. **معین** چینه ها را یکی یکی روی هم چید. بعد هم آن ها را شمرد و گفت: حجم این مکعب مستطیل ۶۰ سانتی متر مکعب است.

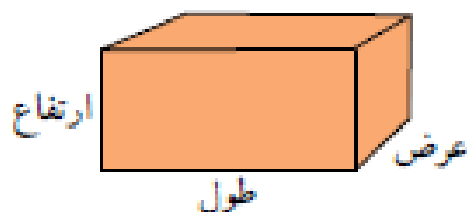


**مهدی** گفت: لازم نیست آن ها را یکی یکی بشماریم. من فقط یک طبقه را می شمارم که ۱۵ تاست. این مکعب مستطیل ۴ طبقه دارد. پس حجم آن  $4 \times 15$  یعنی ۶۰ سانتی متر مکعب است.



**ایلیا** گفت: به نظر من شمردن یک طبقه هم لازم نیست. در هر طبقه ۲ ردیف ۵ تایی یعنی  $2 \times 5$  تا مکعب داریم و چون مکعب مستطیل ۴ طبقه دارد حجم آن  $4 \times 2 \times 5$  است. یعنی ۶۰ سانتی متر مکعب. به نظر شما کدام راه از همه سریع تر به جواب رسیده است؟

به کمک این فعالیت، یک دستور کلی برای محاسبه ی حجم یک مکعب مستطیل بنویسید.



$$\text{حجم مکعب مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع}$$

# حل مسئله

پولیا (۱۹۴۵) چهار مرحله را برای حل مسئله پیشنهاد می‌نماید:

- ۱- فهمیدن مسئله
- ۲- طرح نقشه (یا انتخاب راهبرد مناسب)
- ۳- اجرای نقشه (یا حل مسئله با راهبرد انتخاب شده)
- ۴- برگشت به عقب

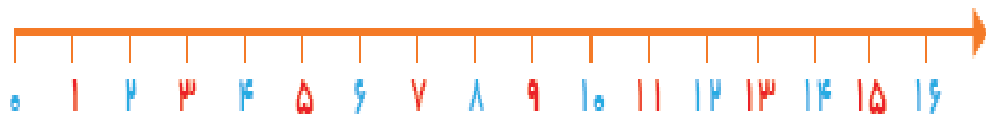
# راهبرد رسم شکل

معلم باید راهبرد رسم شکل را همراه با حل مسئله به کمک دانش‌آموزان، برای آن‌ها توضیح دهد.

برای رسم شکل به اشکال دقیق و واقعی نیازی نیست؛ کافی است با داده‌ها و اطلاعات و خواسته‌های مسئله ارتباط داشته باشد.



۱- امروز روز هفتم ماه است. ۸ روز بعد، چه روزی از ماه است؟ ..... ماه است.



۱- مادر کیک تولد را به طور تقریبی به ده قسمت مساوی تقسیم کرد. او به بزرگ‌ترها دو قسمت و به بچه‌ها یک قسمت از کیک داد. اگر سه بزرگسال و دو بچه کیک گرفته باشند، آیا قسمتی از کیک باقی مانده است؟ راه حل‌های داده شده را بخوانید و آن‌ها را کامل کنید. هر کدام را توضیح دهید.



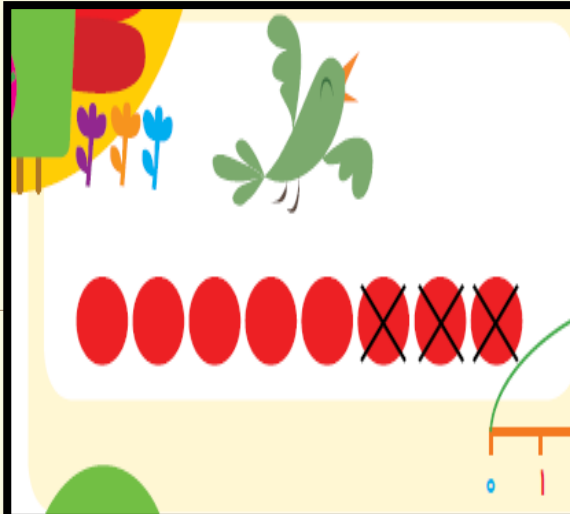
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

هما شکل روبه‌رو را به جای کیک در نظر گرفت و مسئله را به کمک آن حل کرد.



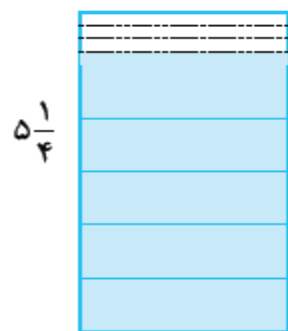
ندا از محور کمک گرفت.

۸ پرنده روی درخت بودند. ۳ تا از پرنده‌ها پرواز کردند و رفتند. چند پرنده مانده است؟



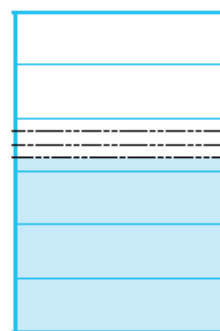
۳- مریم طول اتاق را با قدم‌های مساوی اندازه گرفت؛ ۷ قدم شد. برادرش مجید طول همان اتاق را با قدم‌های مساوی اندازه گرفت؛ ۶ قدم شد. اندازه‌ی قدم‌های چه کسی بزرگ‌تر است؟ با رسم شکل برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲- در یک ظرف  $5\frac{1}{4}$  لیتر آب وجود دارد. اگر ۲ لیتر از این آب مصرف شود، چند لیتر آب در ظرف باقی می‌ماند؟ چند روش برای حل این مسئله نوشته شده است. آن‌ها را توضیح دهید. آیا شما راه حل دیگری برای این مسئله می‌دانید؟



پس از مصرف ۲ لیتر

$$5\frac{1}{4} - 2 = 3\frac{1}{4}$$



الف) به کمک شکل



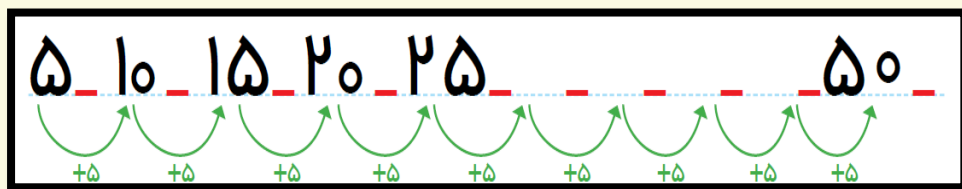
# راهبرد الگویابی

در برخی از مسائل بین عددها و شکل‌ها رابطه‌هایی وجود دارد. کشف این رابطه و بیان آن صورت توصیفی و نوشتاری به حل مسئله و یافتن پاسخ آن کمک می‌کند.

راهبرد الگویابی مهارت کلامی دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد و تفکر و قدرت استدلال آنان را تقویت می‌کند.

# الگوها

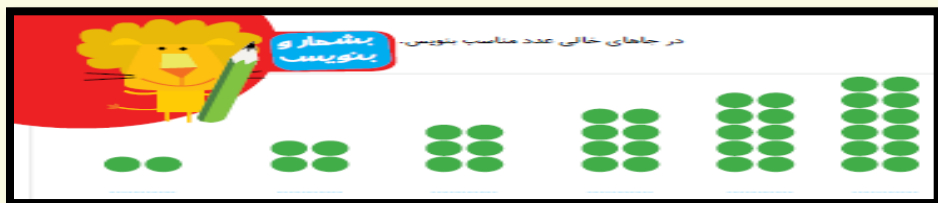
الگوی عددی: رابطه‌ی بین عددهاست. مانند:

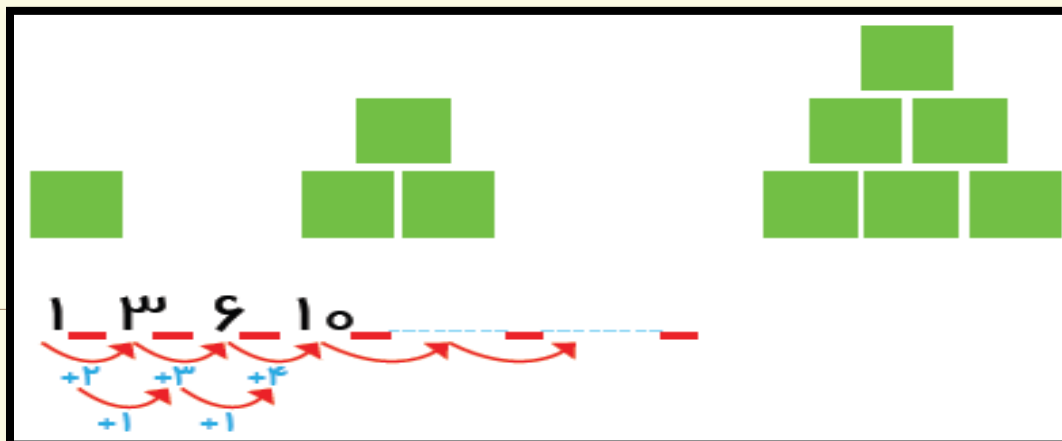


الگوی هندسی: رابطه‌ی بین شکل‌هاست. مانند:

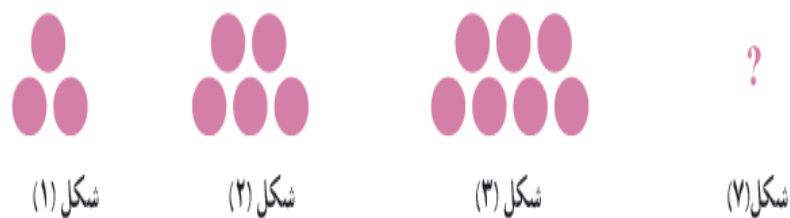


الگوی عددی - هندسی:





هر کدام از شکل‌های زیر از تعدادی دایره درست شده است. اگر شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد دایره‌های شکل هفتم چقدر است؟



۳- مغازه‌داری نوعی بیسکویت را بسته‌ای ۴۵۰ ریال می‌خرد و ۵۰۰ ریال می‌فروشد. با کامل کردن جدول، سود فروش هر بسته بیسکویت را حساب کنید.

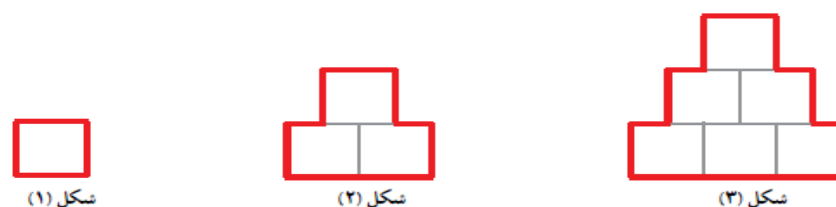
تعداد بسته‌های بیسکویت	۱	۲	۳							
سود بیسکویت‌ها	۵۰	۱۰۰								

+۵۰      +۵۰

الف) ابتدا جدول را کامل کنید.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴		
محیط شکل	۴					

ب) با توجه به رابطه‌ای که در این الگو و جدول مشاهده می‌کنید، محیط شکل دهم را به دست آورید.  
 پ) محیط یکی از شکل‌ها ۳۶ سانتی‌متر است. این شکل چندمین شکل است؟ روش خود را توضیح دهید.  
 ت) در الگوی شکل‌های زیر، بین محیط و شماره‌ی شکل چه رابطه‌ای وجود دارد؟

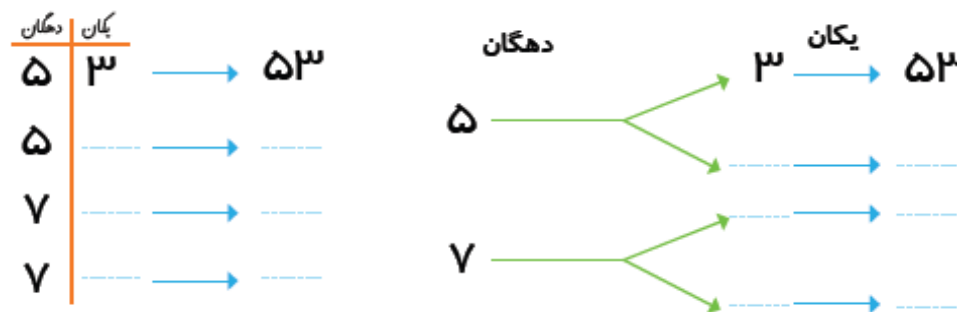


# راهبرد تفکر نظام‌دار

شاید بتوان با هر نظامی هم به پاسخ مسئله رسید، اما آن‌چه مهم است، **منظم فکر کردن** است تا بتواند این شیوه تفکر در **مسائل روزمره** آینده دانش‌آموزان به کار گرفته شود. دانش‌آموز می‌تواند با **پیدا کردن یک الگو یا الگوسازی** (جدول یا نمودار درختی و...) به داده‌ها و خواسته‌های مسئله نظم می‌دهد.

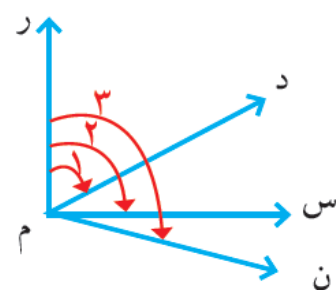
از فواید این راهبرد آن است که **چیزی از قلم نمی‌افتد و جواب هم غیر تکراری است.**

۱- تمامی عددهای دو رقمی را که می‌توان با رقم‌های ۳ و ۴ برای یکان و ۵ و ۷ برای دهگان نوشت، پیدا کنید.



۲	۳	۴	۵	۶
۰	۲			

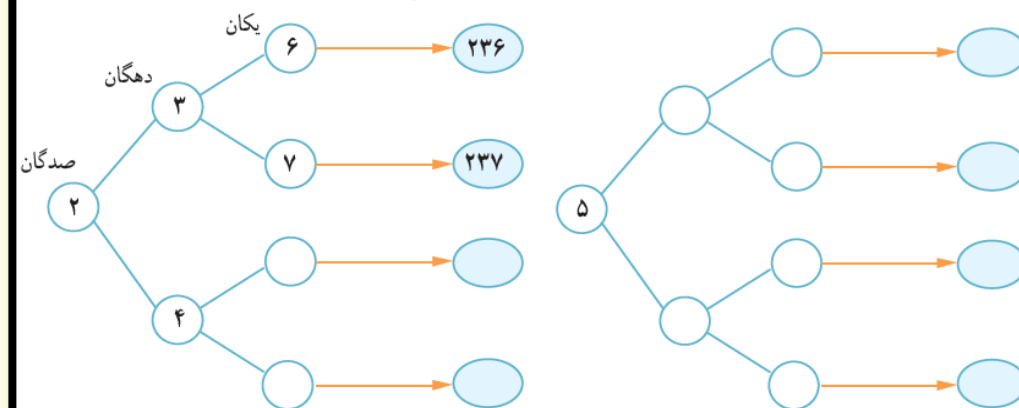
۲- در شکل زیر می‌خواهیم تمام زاویه‌ها را نام ببریم. برای اینکه زاویه‌ای را فراموش نکنیم، از روش الگوسازی استفاده می‌کنیم.



۱ د م  
۲ س م  
۳ ن م

از ضلع «ر م» شروع می‌کنیم:  
سه زاویه با این ضلع می‌توان پیدا کرد.  
کار شما با ضلع «ر م» تمام شد.  
حالا همین کار را با ضلع «د م» انجام دهید.  
پس از آن، ضلع «س م» را در نظر بگیرید.  
در مجموع چند زاویه را نام برده‌اید؟  
آیا مطمئن هستید که هیچ زاویه‌ای را فراموش نکرده‌اید؟

جاهای خالی را پر کنید تا تمامی عددها به دست آیند.  
در مورد نحوه نوشتن عددها و نظمی که به کار رفته است، توضیح دهید.



۱- معلم کارت‌های عددهای ۱، ۴، ۷ و ۹ را به دانش‌آموزان داد. سپس از آنها خواست که دو عدد دو رقمی مختلف با این عددها بسازند و حاصل ضرب آنها را به دست آورند.

ماترله این عددها را ساخت :

۴	۷
۹	۱

×

---

صدیقه این عددها را ساخت :

۹	۴
۱	۷

×

---

الف) حاصل ضرب کدام یک از دو عدد بزرگ‌تر است؟

ب) شما هم با کارت‌ها دو عدد دورقمی بسازید و حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

ج) اگر بخواهید بزرگ‌ترین حاصل ضرب عددهای دورقمی را به دست آورید، کدام دو عدد را انتخاب می‌کنید؟ برای پیدا کردن جواب، در کلاس با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

# راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

در برخی از مسائل می‌توان همه حالت‌های ممکن را با کمک راهبرد نظام‌دار (الگوسازی) در نظر گرفت. سپس با توجه به شرایط و موضوعی که در مسئله مطرح شده است، حالت‌های نامطلوب و ناممکن را حذف کرد تا پاسخ مسئله را پیدا کرد.

۱- با سه کارت که روی آن‌ها رقم‌های ۲ و ۳ و ۵ نوشته شده است، تمام عددهای سه رقمی را که می‌توان ساخت، بسازید و مانند نمونه بنویسید. چند عدد سه رقمی درست شد؟



۲۳۵\_

۲- حالا با سه کارت که روی آن‌ها رقم‌های ۷ و ۰ و ۹ نوشته شده است، تمام عددهای سه رقمی را که می‌توان ساخت، بسازید.



این بار چند عدد سه رقمی درست شد؟

در هر دو حالت ۳ کارت داشتیم. چرا تعداد عددهای سه رقمی کمتر از مسئله‌ی قبلی است؟

۴- شما هم برای عبارت زیر تمام جواب‌های ممکن را پیدا کنید. حالت‌های نامطلوب را کنار بگذارید تا پاسخ‌های

درست به دست آیند.

$$\square \times 9 < 56$$

چه عددی را در مربع قرار دهیم که حاصل آن نزدیک‌ترین عدد به ۵۶ باشد؟

۲- بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی را بنویسید.

بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی را که در آن هیچ رقمی تکرار نشده باشد، بنویسید.

کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی را بنویسید.

کوچک‌ترین عدد زوج ۴ رقمی را که در آن هیچ رقمی تکرار نشده باشد، بنویسید.

حالا کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی را که در آن هیچ رقمی تکرار نشده باشد، بنویسید.

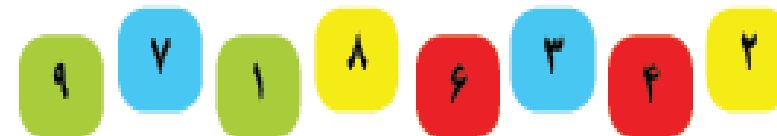
با توجه به اطلاعات مسئله، از رقم‌های ۰ تا ۹ چگونه استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

۴- کارت‌های زیر طبق جدول رنگ شده‌اند. از هر ۸ کارت استفاده کنید و دو عدد بسازید و با هم جمع کنید. قبل از

جمع کردن، حدس بزنید حاصل تقریباً چند می‌شود.

حالا بزرگ‌ترین عدد و کوچک‌ترین عددی را که می‌توانید، با این کارت‌ها بسازید و مجموع آن دو عدد را به دست آورید.

مرتب	هزارم	صدم	دهم	یکان
رنگ	سبز	قرمز	آبی	زرد





# راهبرد زیرمسئله

بسیاری از مسئله‌های پیچیده را می‌توان به مسئله‌های ساده و مرحله‌ای (طرح مسئله حین حل مسئله) (سیلور، ۱۹۹۵) تبدیل کرد. وقتی مسئله‌های ساده و مرحله‌ای حل می‌شوند، مسئله اصلی و پیچیده نیز به جواب خواهد رسید. دانش‌آموزان کافی است زیرمسئله‌ها را تشخیص دهند.

۱- یک کتاب داستان ۳۹۵ صفحه داشت. حسین در یک هفته ۱۵۰ صفحه و در هفته‌ی دوم ۱۳۰ صفحه از کتاب را خواند. چند صفحه را هنوز نخوانده است؟ برای حل این مسئله دو مرحله‌ی زیر را انجام دهید.

الف) ابتدا حساب کنید چند صفحه از کتاب خوانده شده است؟

ب) حالا تعداد صفحات باقی مانده را پیدا کنید.

در گلدان ۶ گل سفید و ۸ گل صورتی بود. ۱۰ تا از گل‌ها پژمرده شد. چند گل شاداب در گلدان است؟

..... گل در گلدان است.  $\square + \square = \square$

..... گل شاداب است.  $\square - \square = \square$

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	شنبه
۲	۱					
۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳
۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰
۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷
۲۴	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴
						۳۱

در شکل روبه‌رو، تقویم فروردین ماه در یک سال شمسی را می‌بینید.

در ایام نوروز آن سال دانش‌آموزان چند دقیقه تعطیل بوده‌اند؟

برای حل مسئله آن را به ۳ زیر مسئله تقسیم می‌کنیم. شما هم این زیر مسئله‌ها را حل کنید تا پاسخ مسئله به‌دست آید. در صورت تمایل، برای محاسبه از ماشین حساب کمک بگیرید.

❖ تعداد روزهای تعطیل دانش‌آموزان در نوروز چند روز است؟

❖ این روزها چند ساعت می‌شوند؟

❖ هر ساعت ۶۰ دقیقه است. این تعداد ساعت چند دقیقه می‌شود؟

۲- سیپده ۲ دسته گل رز قرمز خرید که هر دسته‌ی آن ۳ شاخه گل داشت. او ۳ دسته گل رز سفید هم خرید که در هر دسته‌ی آن ۴ شاخه گل بود. سیپده چند شاخه گل خریده است؟

مانند مسئله‌ی بالا، ابتدا مسئله‌های کوچک را بنویسید.



۱-

۲-

۳-

۴- آقای بهرامی از میوه‌فروشی خرید کرده است. حساب کنید که او چند تومان باید بپردازد.

نام میوه	قیمت هر کیلوگرم به تومان	خرید به کیلوگرم
سیب	۲۵۰۰	۳/۴
پرتقال	۳۲۰۰	۵/۶
نارنگی	۴۳۰۰	۳/۷۵

# راهبرد حل مسئله ساده‌تر

حل مسئله در تعداد حالت‌های کمتر باعث سریع‌تر پیدا کردن الگوی مناسب حل مسئله می‌شود و آن را به مسئله اصلی ارتباط می‌دهد. مثلاً، استفاده از عددهای صحیح یا تقریبی به جای اعداد اعشاری و کسری

۱- قَدْ رضا ۱۴۷ سانتی متر است. حمید ۱۱ سانتی متر از او کوتاه تر است. قَدْ حمید چند سانتی متر است؟  
 برای فهمیدن راه حل مسئله بهتر است عددهای تقریبی را در نظر بگیرید. به جای ۱۴۷ عدد ۱۵۰  
 و به جای ۱۱ عدد ۱۰ را در نظر بگیرید. یک بار دیگر مسئله را با این عددها بخوانید. برای پیدا کردن  
 اندازه‌ی قَدْ حمید باید عمل جمع را انجام دهید یا تفریق؟

امیر گفت: «بهتر است مسئله را ساده کنیم. من به جای کسرهای  $\frac{1}{11}$  و  $\frac{1}{10}$  کسرهای ساده‌تری مثل  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{5}$  را مقایسه می‌کنم». او هم شروع به کشیدن شکل کرد. شما کار او را کامل کنید.



۱- تعداد قطره‌های یک ۲۰ ضلعی بیشتر است یا یک ۱۹ ضلعی؟

برای پاسخ دادن به این سؤال بهتر است قطره‌های سه ضلعی، چهار ضلعی، پنج ضلعی و شش ضلعی را رسم کنید.  
 سپس برای مسئله‌ی اصلی پاسخ پیدا کنید.



۲- یک کارخانه‌ی خودروسازی قیمت یک نوع خودرو را ۲۹۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال اعلام کرده است. اگر این  
 کارخانه در هر روز ۶۰ دستگاه از این خودروها بفروشد، فروش روزانه‌ی این نوع خودرو چند ریال می‌شود؟

# راهبرد حدس و آزمایش

حدس و آزمایش می‌تواند مسئله را ساده‌تر کند.  
به دانش‌آموزان باید آموزش داد حدس‌ها باید **منطقی**  
باشند، یعنی پس از **بررسی و نتیجه‌گیری** حدس اول خود،  
حدس دوم را بر اساس آن تعیین کنند. همچنین باید **مراحل**  
**حدس و آزمایش و استدلال** خود را **مکتوب** بیان کند تا  
دیگران قادر به درک مراحل انجام کار او باشند.

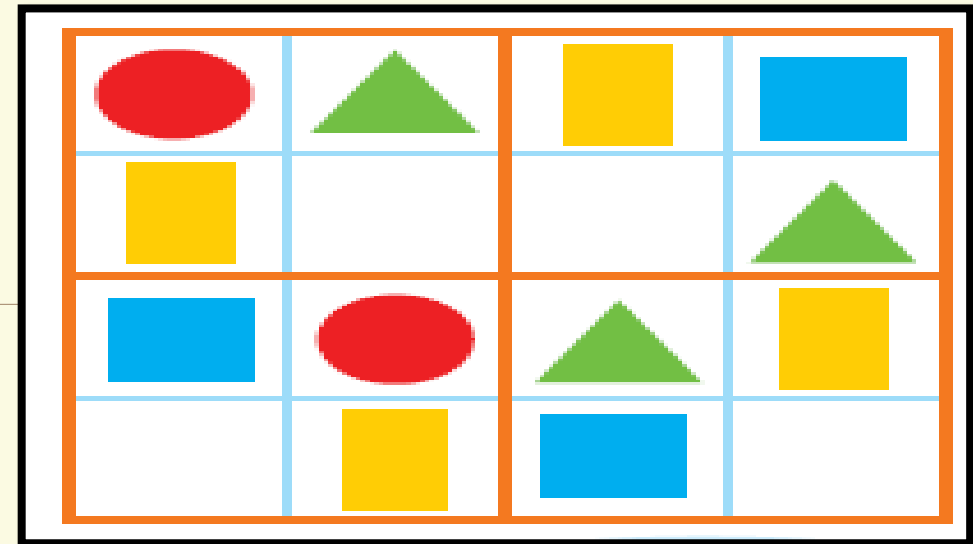
در یک مزرعه روی هم ۴ تا شترمرغ و گوسفند هستند. آن‌ها روی هم ۱۴ پا دارند. (هر شترمرغ ۲ پا و هر گوسفند ۴ پا دارد.) در این مزرعه چند تا شترمرغ و چند تا گوسفند است؟

شترمرغ      گوسفند

۲ و ۴ : حدس اول

$$2 + 2 + 4 + 4 = \dots$$

با توجه به جواب آزمایش مربوط به حدس اول، تعداد گوسفندها را باید کمتر کرد یا بیشتر؟ چرا؟



۱- کدام عددهای یک رقمی هستند که اگر در خودشان ضرب شوند، حاصل آن‌ها بیشتر از ۳۰ می‌شود؟

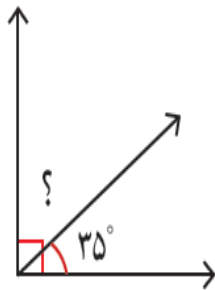
به جای مربع عددهای یک رقمی قرار دهید و حاصل را پیدا کنید.

$$\square \times \square =$$

۳- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی زاویه‌ای را که با علامت (?) مشخص شده است پیدا کنید.

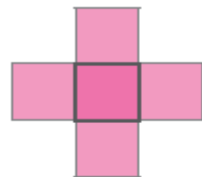
با توجه به علامت زاویه‌ی راست، متوجه می‌شویم که جمع دو زاویه برابر زاویه‌ی راست یا ۹۰ درجه است، پس می‌توانیم تساوی زیر را بنویسیم:

$$\square + 35^\circ = 90^\circ$$

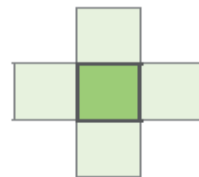


برای پیدا کردن زاویه‌ی موردنظر (عددی که داخل مربع قرار می‌گیرد)، از راهبرد حدس و آزمایش استفاده کنید.

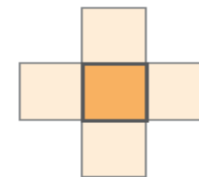
۱- عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در هر یک از شکل‌های زیر بنویسید. طوری که مجموع ۳ عدد عمودی با مجموع ۳ عدد افقی برابر شوند. سپس این مسئله را در سه حالت زیر حل کنید.



مجموع عددها ۸ شود



مجموع عددها ۹ شود



مجموع عددها ۱۰ شود



# راهبرد نمادین

مدلسازی بسیاری از مسئله‌ها با روش‌های جبری است.  
تشکیل معادله یا معادلات مسئله را به دنیای ریاضی  
برده و آن را به یک مسئله جبری- ریاضی تبدیل  
می‌نماید.



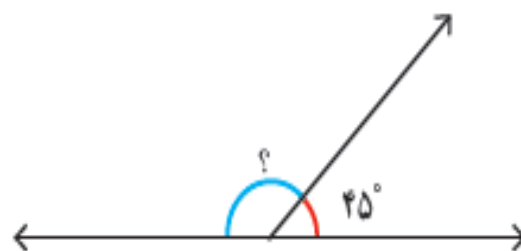
۳- مانند نمونه‌ی بالا به جای  $\triangle$  و  $\bigcirc$  چه عددی باید قرار داد؟

$$۲۹ + \triangle = ۶۳$$

<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	= <input type="text"/>

۴- در شکل زیر، اندازه‌ی زاویه‌ای را که با علامت (?) مشخص شده است، پیدا کنید.

$$\square + ۴۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$



۲- عددی را با ۱۰۰۰ جمع کردیم؛ حاصل ۱۱۰۰ شد. این عدد را به دست آورید.

$$\square + ۱۰۰۰ = ۱۱۰۰$$

۴- الف) یک نسبت مساوی  $\frac{۵}{۳}$  بنویسید که صورت آن ۷۵ باشد.

ب) یک نسبت مساوی  $\frac{۵}{۳}$  بنویسید که مخرج آن ۲۴ باشد.

# توصیه‌های آموزشی

- ✓ عدم توصیه راهبرد خاص به دانش‌آموزان.
- ✓ مرور راهبردها توسط دانش‌آموزان در ذهن‌شان.
- ✓ انتخاب راهبردها توسط دانش‌آموزان.
- ✓ بررسی راهبردهای ممکن دیگر برای حل مسئله.
- ✓ مقایسه و یافتن راهبردی که ساده‌تر و سریع‌تر به جواب می‌رسد.